

中原大學 95 學年度碩士班入學考試

3 月 18 日 14:00~15:30 土木工程系(結構組/大地組/水環組) 誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目： 工程數學 (共 1 頁第 1 頁)

可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者 不可使用計算機

1. (a) 試證明 Green's theorem in the plane $\iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint F_1 dx + F_2 dy$ 。(15分)

(b) 假設區域R為片段圓滑的曲線C所包圍，試證明區域R之面積 $A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$ 。(5分)

2. 試求 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = \ln x$ 之解。(15分)

3. 令 $[A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 試求對應的特徵值(eigenvalues)及特徵向量(eigenvectors)。(15分)

4. (a) 給定一存在於 $-l < x < l$ 之正交函數集合 $S = \{ 1, \cos \frac{m\pi}{l} x, \sin \frac{n\pi}{l} x \mid m, n \text{ 為正整數} \}$ ，試將此集合正規化(Normalization)。(9分)

(b) 設 $f(x)$ 在 $-l < x < l$ 領域中為一段連續函數，表為

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad -l < x < l$$

試求 a_0, a_n, b_n (9分)

5. 試利用冪級數解 Legendre 方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \quad (14分)$$

6. (a) 試將 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$ 以 $z_0 = 0$ 為中心，在 $1 < |z| < 2$ 環內展開成Laurent級數。(9分)

(b) 積分 $\oint_C f(z) dz$ ， $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2}$ ，式中C為 $|z| = R$ ， $1 < R < 2$ 。(9分)